Matrices: concepto, suma, producto, transpuesta, determinante, adjunta e inversa.

1. Concepto de Matriz y operaciones básicas

1.1. Concepto

Una **matriz** es un conjunto ordenado de números. Los números están ordenados por filas y por columnas.

La **dimensión** de una matriz es **m x n**, siendo *m* el número de filas y *n* el número de columnas.

Cuando m = n, se dice que la matriz es una matriz **cuadrada** de dimensión m.

Ejemplo de una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene 3 filas y 3 columnas. Por tanto, es una matriz de dimensión 3x3. Es una matriz cuadrada de dimensión 3.

Cada número de la matriz ocupa una **posición** determinada por la columna y la fila a las que pertenece. La posición de un número de la matriz es **(i,j)**, siendo *i* la fila y *j* la columna.

En el ejemplo, las posiciones (1,2), (2,1), (3,2) y (2,3) son 0's. El número 4 está en la posición (1,3), y el número -9 está en la posición (3,3).

1.2. Suma de matrices

Si dos matrices tienen la misma dimensión, el resultado de sumarlas es la matriz que en la posición (i,j) tiene la suma de los números de la posición (i,j) de las dos matrices.

Ejemplo de una suma de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & 2+9 \\ -1+3 & 0+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3. Multiplicación de un escalar por una matriz

El producto de un número α por una matriz A es la matriz que resulta al multiplicar todos los elementos de A por el número α.

Ejemplo:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

1.3. Matriz transpuesta

Dada una matriz A de dimensión m x n, se define la matriz transpuesta de A como la matriz que resulta al escribir las filas de A como columnas. Esta matriz tiene dimensión n x m.

Ejemplo de matriz transpuesta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

(como la matriz es cuadrada, la dimensión de la transpuesta de A es la misma que la de A.)

1.4. Matrices especiales

Se llama **matriz diagonal** a cualquier matriz tal que los elementos de la posición (i,j) son 0's si i≠j.

Ejemplo de matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada de dimensión n se dice que es la **matriz identidad de dimensión n** si es diagonal y en las posiciones (i,i) tiene 1's:

Ejemplo de matrices identidad:

$$I_1 = (1)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Más información:

- Concepto de matriz
- Ejemplos de sumas de matrices
- Matrices con nombre (diagonal, triangular, Hessenberg, diagonalmente dominante, simétrica, definida positiva...)

2. Producto de matrices

2.1. Definición del producto

Para poder calcular el producto A·B de la matriz A se requiere que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

Si la dimensión de A es **m x n** y la dimensión de B es **n x p**, el producto A·B es una matriz de dimensión **m x p**.

El elemento de la posición (i,j) de la matriz A·B es el resultado de multiplicar la fila i de A por la columna j de B.

Ejemplo de producto de matrices:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\5 & 6\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+0\cdot 5 & 2\cdot(-1)+0\cdot 6\\1\cdot(-1)+3\cdot 5 & 1\cdot(-1)+3\cdot 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2\\14 & 17\end{pmatrix}$$

- El elemento de la posición (1,1) de la matriz A·B es el resultado de multiplicar la fila 1 de A por la columna 1 de B:

  (2,0)·(-1,5) = 2·(-1)+0·5 = -2

- El elemento de la posición (1,2) de la matriz A·B es el resultado de multiplicar la fila 1 de A por la columna 2 de B:

  (2,0)·(-1,6) = 2·(-1) +0·6 = -2

- El elemento de la posición (2,1) de la matriz A·B es el resultado de multiplicar la fila 2 de A por la columna 1 de B:

  (1,3)(-1,5) = 1·(-1) +3·5 = 14

- El elemento de la posición (2,2) de la matriz A·B es el resultado de multiplicar la fila 2 de A por la columna 2 de B:

  (1,3)·(-1,6) = 1·(-1)+3·6 = 17

EL producto de matrices NO es conmutativo. Es decir, puede ocurrir que A·B ≠ B·A.

La matriz identidad de dimensión adecuada es el **neutro** del producto de matrices. Es decir, si la matriz A es de dimensión **m x n**, entonces

$$\mathbf{I_m \cdot A = A = A \cdot I_n}$$

2.2. Matriz inversa

Si A es una matriz **cuadrada** de dimensión n, se denomina **matriz inversa** de A (y se representa mediante A^{-1}) a la matriz de dimensión n, en caso de existir, que cumple

$$\mathbf{A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A}$$

Ejemplo:

La matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Antes de ver cómo calcular la inversa, necesitamos explicar el determinante y la matriz adjunta de una matriz.

Más información:

- Ejemplos del producto de matrices
- Matriz inversa (teoría)
- Cálculo de la matriz inversa (por adjunción)
- Potencias de matrices

3. Determinante de una matriz

El **determinante** es una función definida sobre matrices **cuadradas**. El determinante de una matriz A se representa por **det(A)**, **DET(A)** o bien **|A|**.

Vamos a ver cómo calcularlo según la dimensión de la matriz:

Dimensión 1:

Si la matriz es de dimensión 1, es de la forma A = (a). Entonces, su determinante es det(A) = a. Por ejemplo, el determinante de la matriz A = (-3) es |A| = -3.

Dimensión 2:

La matriz es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Su determinante es

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1}$$

Por ejemplo,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Dimensión 3:

La matriz es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Su determinante es

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_{1,1}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,3} + a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,1} + a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{1,3}\right) -$$

$$- \left(a_{1,3}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,1} + a_{1,2}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,3} + a_{2,3}\cdot a_{3,2}\cdot a_{1,1}\right)$$

(regla de Sarrus).

Por ejemplo,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\cdot 3\cdot 3 + 0\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 1 -$$

$$- (1\cdot 3\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1) =$$

$$= 9 - (3 + 4) = 9 - 7 = 2$$

Dimensión mayor que 3:

No hay una regla (fácil) para calcular su determinante. En estos casos, aplicaremos el desarrollo del determinante por Laplace. El desarrollo del determinante de por la fila i de la matriz A de dimensión n es

$$\det(A) = |A| = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\det(A^{i,k})$$

La matriz $A^{i,j}$ es la matriz resultante al quitar la fila i y la columna j de A.

El desarrollo puede aplicarse también a matrices de dimensión menor que o igual que 3, por ejemplo,

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{1,2}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Más información:

- Determinante (teoría)
- Cálculo de determinantes (ejemplos)

4. Adjunta de una matriz

Dada una matriz cuadrada A = ($a_{i,j}$), donde $a_{i,j}$ representa el número de la posición fila i y columna j de A, se define el adjunto (i,j) de A como

$$\mathbf{ad_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\, A^{i,j}\,)}$$

donde la matriz $A^{i,j}$ es la matriz resultante al quitar la fila i y la columna j de A.

Se llamada **matriz adjunta** de A, **adj(A)**, a la matriz (de la misma dimensión que A) que tiene en la posición (i,j) el adjunto $ad_{i,j}$ de la matriz A.

Ejemplo:

Calculamos los adjuntos de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Éstos son:

$$ad_{1,1} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$
$$ad_{1,2} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$
$$ad_{1,3} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2$$
$$ad_{2,1} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$
$$ad_{2,2} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$
$$ad_{2,3} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$
$$ad_{3,1} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -4$$
$$ad_{3,2} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 8$$
$$ad_{3,3} = (-1)^6 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

Por tanto, la matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Cálculo de la matriz inversa

Si A es una matriz cuadrada y su determinante es distinto de 0, entonces **existe** su matriz inversa, A^{-1}.

Una forma de calcular esta matriz es a partir de su matriz adjunta, Adj(A):

$$A^{-1} = \frac{\left(Adj(A)\right)^T}{\det\,(A)} = \frac{\left(Adj(A)\right)^T}{|\mathrm{A}|}$$

(T indica transpuesta).

Ejemplo:

En el ejemplo anterior, la matriz adjunta calculada es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 3 - (3\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1) =$$
$$= 2 + 2 - (6 + 6) = -8$$

Por tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{\left(Adj(A)\right)^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}}{-8} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Más información:

- Determinante, rango y menores (teoría)
- Cálculo de la matriz inversa (ejemplos)